Dienst Curriculum & vorming
Team secundair onderwijs
Guimardstraat 1 - 1040 BRUSSEL
www.katholiekonderwijs.vlaanderen

Grafen in leerplannen wiskunde D-finaliteit
2021-03-10

1 Inleiding

In de verschillende leerplannen wiskunde B, B+C’, VB, VB+C’ en C voor de 2de graad D-finaliteit zijn twee leerplandoelen opgenomen over grafen. De concrete nummering van de doelen hangt af van het leerplan.

LPD 1 De leerlingen interpreteren een graaf als een model van een concrete situatie.

LPD 2 De leerlingen gebruiken grafen om problemen op te lossen.

Dit document heeft als bedoeling om meer inhoudelijke duiding te geven bij de twee doelen en de daarbij horende wenken met hier en daar ook een mogelijk inspirerend voorbeeld. De tekst is niet bedoeld als leermateriaal: daarvoor is het bijvoorbeeld veel te condens neergeschreven. Bij eventuele vragen over het document kan je terecht bij Filip.Cools@katholiekonderwijs.vlaanderen .

2 Grafen en vaak voorkomende terminologie

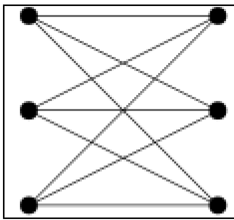
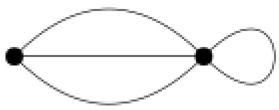
Definitie via grafische voorstelling:

Grafen bestaan uit een aantal punten, die **knopen** worden genoemd, en (mogelijke) verbindingen tussen die knopen via lijnen, die **bogen** worden genoemd.

Als we hierbij meerdere bogen tussen dezelfde twee knopen toelaten, dan wordt de graaf een **multigraaf** genoemd. Indien niet, dan spreken we van een **enkelvoudige graaf**.

Soms worden ook bogen toegelaten waarvan de twee eindpunten samenvallen. Zulke bogen worden **lussen** genoemd.

Voorbeelden:

	Enkelvoudige graaf met 6 knopen en 9 bogen		Multigraaf met 2 knopen en 4 bogen waarvan 1 lus

Formele definitie:

Grafen kunnen ook formeel gedefinieerd worden: een graaf G is dan een koppel (K, B) waarbij K een eindige verzameling is en B een (multi)verzameling bestaande uit paren $\{k, k'\}$ met $k, k' \in K$. De verzameling K bestaat dan uit de knopen en de verzameling B uit de bogen.

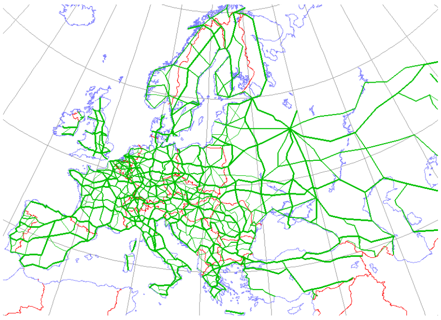
Bijkomende veel gebruikte terminologie:

- De knopen waarmee een gegeven knoop verbonden is noemen we de **buren** van die knoop.
- De **graad** van een knoop in een enkelvoudige graaf is het aantal buren van de knoop. Deze definitie kan worden uitgebreid naar multigrafen: de graad van een knoop is dan het aantal bogen die deze knoop als uiteinde hebben. Bij grafen met lussen moeten lussen twee keer geteld worden bij de graad van een knoop.
- Een **wandeling** door een graaf is een rij van aansluitende bogen, d.w.z. twee opeenvolgende bogen hebben steeds een uiteinde gemeen. Een wandeling heeft een **beginpunt** en een **eindpunt**. Bij een **gesloten wandeling** vallen het beginpunt en het eindpunt samen; bij een **open wandeling** zijn dit twee verschillende punten.
- Een graaf is **samenhangend** als elke twee knopen van de graaf verbonden zijn door een wandeling.
- Een **pad** is een wandeling waarbij alle gepasseerde knopen verschillend zijn.
- Een **cykel** is een gesloten wandeling waarbij alle gepasseerde knopen verschillend zijn uitgezonderd van de begin- en eindknoop.
- Een **spoor** is een wandeling waarbij alle gepasseerde bogen verschillend zijn.
- Een **circuit** is een gesloten spoor.

3 Eerste leerplandoel

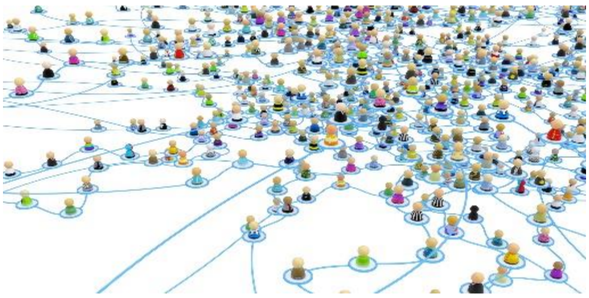
Voorbeelden van concrete situaties die door grafen beschreven kunnen worden:

- **Transportnetwerken**



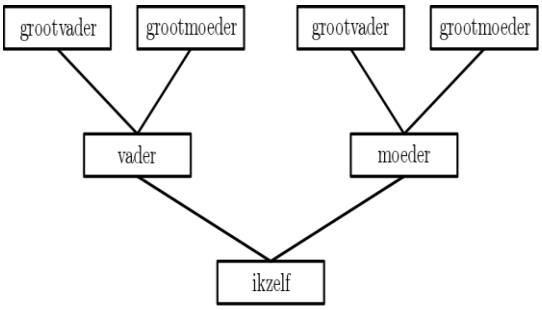
Bij transportnetwerken komen de knopen overeen met knooppunten (bv. steden, haltes …) en de bogen met directe verbindingen. Een transportnetwerk is samenhangend als je vanuit één knooppunt naar alle andere knooppunten kan reizen via het netwerk.

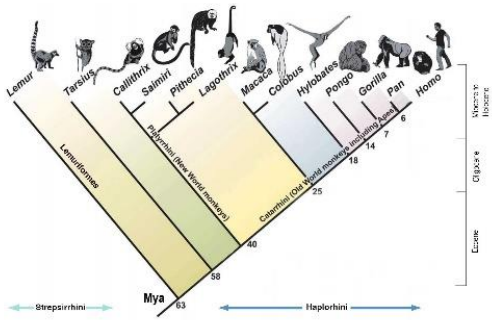
- **Sociale netwerken**



Bij sociale netwerken komen de knopen overeen met de deelnemers aan het netwerk en de bogen met relaties tussen de deelnemers (bv. vriendschap).

- **Stambomen**

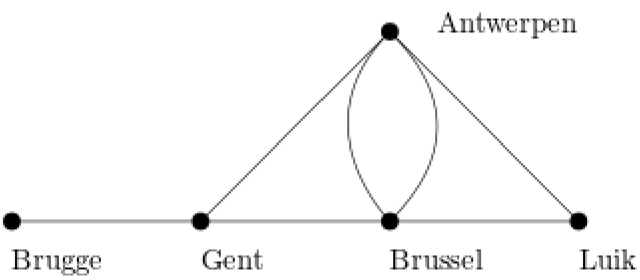


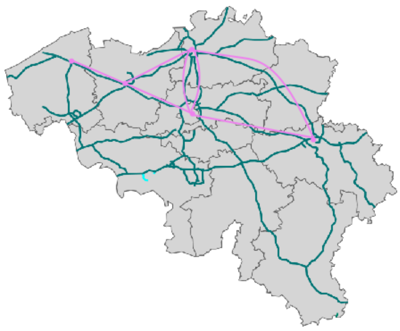


In de rechtse figuur gaat het om een evolutionaire of fylogenetische stamboom, waarbij de interne knopen overeenkomen met gemeenschappelijke voorvaderen van de diersoorten die erboven staan.

Voorbeeld van transportnetwerk (autosnelwegen): In bovenstaande voorbeelden zijn de grafische voorstellingen gegeven. Je kan ook leerlingen een voorstelling van een graaf laten maken vanuit een beschrijving. Bijvoorbeeld:

“Brugge is verbonden met Gent via de E40. Gent is ook verbonden met Brussel via de E40 en met Antwerpen via de E17. Brussel is ook verbonden met Antwerpen via de A12 en de E19 en met Luik via de E40. Luik is ook verbonden met Antwerpen via de E313.”





4 Tweede leerplandoel

Grafen kunnen worden gebruikt om problemen op te lossen door de problemen eerst te vertalen (of te mathematiseren) naar problemen op grafen. In de onderstaande delen 4.1-4.8 geven we een aantal voorbeelden van types van zulke problemen. Belangrijk is dat je je bij de realisatie van het tweede leerplandoel over grafen best beperkt in het aantal types (onder het motto “*less is more*”).

4.1 Toepassen van eigenschappen i.v.m. buren op grafen

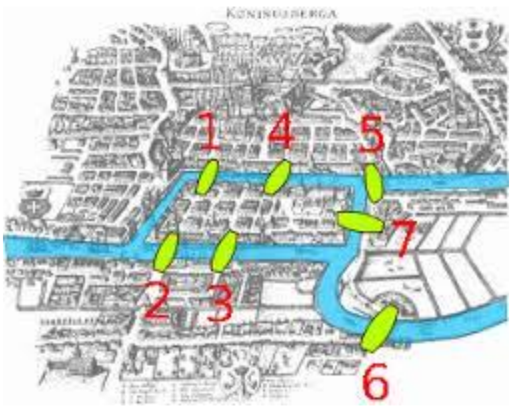
Stel dat we de som van de graden van alle knopen van een graaf willen bepalen. Omdat elke boog twee keer wordt geteld in de som (één keer in de graad van elk van de twee uiteindes), geldt “*de som van de graden van alle knopen is gelijk aan twee keer het aantal bogen*”. Bijgevolg is de som van de graden even en geldt “*het aantal knopen met oneven graad is even*”. Beide eigenschappen kunnen worden onderzocht door de leerlingen en nadien ook worden toegepast (zie bijvoorbeeld [2, p. 22-24]).

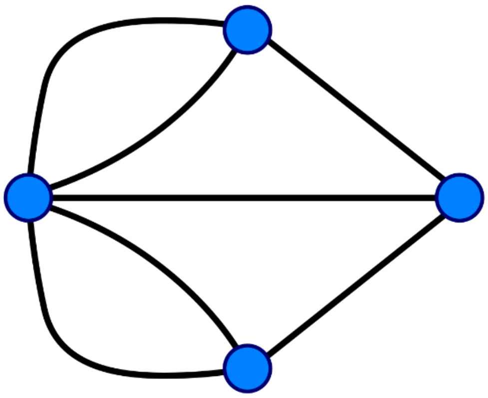
Voorbeeld: Stel dat op een feestje 7 personen aanwezig zijn. Van 6 personen weet je dat ze precies 2 andere personen kennen. We veronderstellen hier dat 'elkaar kennen' symmetrisch is. Welke mogelijkheden zijn er dan voor het aantal personen die de zevende persoon kent?

Hier kan gewerkt worden met een enkelvoudige graaf met 7 knopen, waarbij elke knoop overeenkomt met een feestvierder en elke boog aangeeft dat twee personen elkaar kennen. Er is dan gegeven dat 6 knopen graad twee hebben. Uit de eigenschappen volgt dat de graad van de zevende persoon ook even moet zijn. De overgebleven mogelijkheden zijn dan graad 0, 2, 4 en 6. Kan je voor elk van deze mogelijkheden een bijbehorende graaf tekenen?

4.2 Eulersporen, -circuits en -grafen

De bruggen van Königsberg (instap): Bestaat er een wandeling door de stad Königsberg die alle 7 bruggen juist één keer aandoet? Leonhard Euler merkte in 1736 op dat dit probleem vertaald kan worden naar een probleem op een graaf. In de bijbehorende graaf komen de knopen overeen met de stadsdelen en de bogen met de bruggen. De vraag wordt dan: bestaat er een wandeling op de multigraaf die alle bogen precies één keer gebruikt?





Terminologie:

- Een **Eulerspoor** is een open wandeling die alle bogen precies één keer aandoet.
- Een **Eulercircuit** is een gesloten wandeling die alle bogen precies één keer aandoet.
- Een **Eulergraaf** is een (multi)graaf met een Eulercircuit. Merk op dat zo'n graaf steeds samenhangend is, op eventueel enkele geïsoleerde knopen na.

Observatie: Beschouw een wandeling op een graaf die alle bogen maximaal één keer passeert, m.a.w. een spoor of een circuit. Als zo een wandeling een knoop passeert, dan is de boog waarmee hij toekomt in de knoop verschillend van de boog waarmee hij vertrekt. Bij een Eulerspoor of -circuit worden alle bogen gepasseerd, dus de graad van alle knopen is even, uitgezonderd van mogelijk de begin- en eindknoop. Bij een Eulercircuit hebben (via een analoog argument) ook de begin- en eindknoop een even graad; bij een Eulerspoor een oneven graad.

Bovenstaande observatie blijkt aanleiding te geven tot een noodzakelijke en voldoende voorwaarde.

Stelling (Euler, Hierholzer): Samenhangende grafen hebben een Eulercircuit als en slechts als alle knopen een even graad hebben. Samenhangende grafen hebben een Eulerspoor als en slechts als alle knopen een even graad hebben uitgezonderd van juist twee knopen.

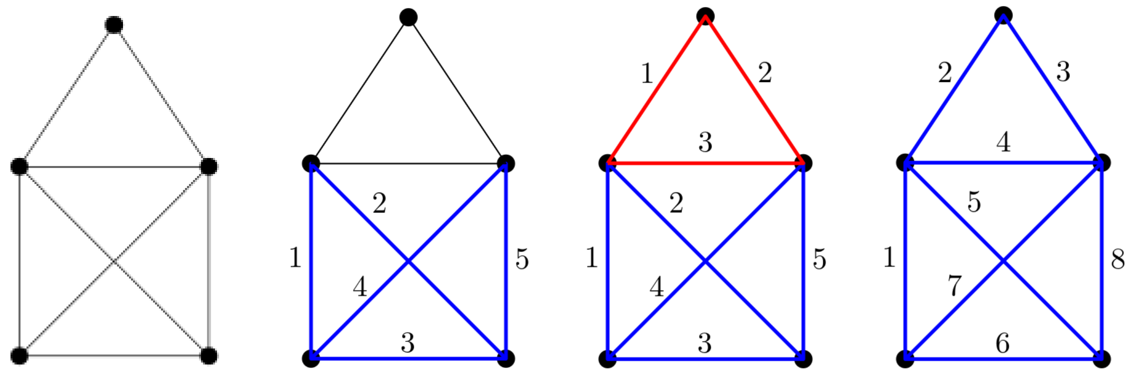
De bruggen van Königsberg (vervolg): De multigraaf heeft 3 knopen van graad 3 en 1 knoop van graad 5. Bijgevolg heeft die graaf geen Eulerspoor en geen Eulercircuit.

Algoritme van Hierholzer (1873): Onderstaand algoritme bepaalt een Eulerspoor of -circuit op een samenhangende graaf als die aan de bijbehorende noodzakelijke voorwaarde voldoet. Bij een Eulerspoor neem je als begin- en eindpunt de knopen met oneven graad. Bij een Eulercircuit neem je als beginpunt (en tevens eindpunt) een willekeurige knoop van de graaf.

1. Neem een wandeling door de graaf die start in het beginpunt en waarbij je bij elke knoop die de wandeling aandoet steeds een random gekozen boog kiest die nog niet is gepasseerd. (*Opmerking: omwille van de noodzakelijke voorwaarde kan je onderweg nooit vast komen te zitten en eindig je zo uiteindelijk ook in het gekozen eindpunt*.)
2. Als bij die wandeling niet alle bogen gepasseerd werden: neem een knoop die werd gepasseerd door de wandeling en waarbij niet alle aangrenzende bogen zijn gepasseerd. (*Opmerking: zo'n knoop bestaat steeds omdat de graaf samenhangend is.*)
   Construeer op een gelijkaardige manier als in stap 1 een circuit vanuit die knoop op de graaf bekomen door in de originele graaf alle bogen die zijn gepasseerd door de wandeling weg te halen. Schakel de wandeling en het circuit aaneen tot één wandeling.
3. Herhaal stap 2 totdat je een Eulerspoor of Eulercircuit verkrijgt.

Voorbeeld:

Beschouw de onderstaande graaf (deel 1 van de figuur). Uitgezonderd van de onderste twee knopen hebben alle knopen een even graad, dus de graaf voldoet aan de voorwaarde om een Eulerspoor te hebben. We nemen als beginpunt de linkse van de twee onderste knopen en als eindpunt de rechtse knoop. Bij stap 1 van het algoritme kan het gebeuren dat we de blauwe wandeling verkrijgen (deel 2), waarbij de nummers de volgorde van de bogen in de wandeling aangeven. Deze wandeling is nog geen Eulerspoor. Bij stap 2 kunnen we dan het rode circuit nemen (deel 3), dat kan aaneengeschakeld worden tot een spoor (deel 4). Dit geeft uiteindelijk een Eulerspoor. Uiteraard is het algoritme nuttiger voor meer complexe grafen.



4.3 Hamiltonpaden, -cykels en -grafen

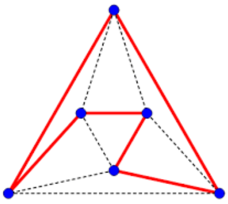
Beschouw een enkelvoudige graaf. In dit deel bekijken we wandelingen die niet de bogen maar de knopen precies één keer doorlopen. Zulke wandelingen zijn dus een speciale soort van paden of cykels.

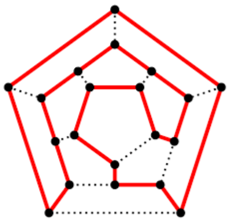
Terminologie:

- Een **Hamiltonpad** is een wandeling die alle knopen van de graaf precies één keer aandoet.

- Een **Hamiltoncykel** is een gesloten wandeling die alle knopen van de graaf precies één keer aandoet, behalve uiteraard de begin- en eindknoop.
- Een **Hamiltongraaf** is een graaf met een Hamiltoncykel.

Voorbeelden: In onderstaande Hamiltongrafen werd een Hamiltoncircuit in het rood getekend en de overige bogen in stippellijn.





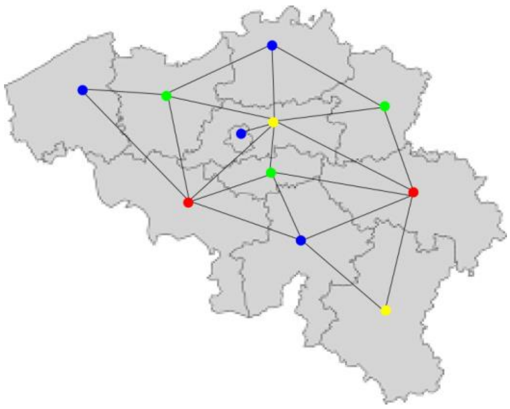
In de context van transportnetwerken komen Hamiltonpaden of -cykels overeen met reisroutes die elk knooppunt (bv. stad, halte …) maar één keer aandoen.

In deel 4.3 zagen we dat grafen met een Eulerspoor of -circuit makkelijk te karakteriseren zijn, maar dat is niet het geval bij grafen met een Hamitonpad of -cykel.

4.4 Kleuringen van landkaarten, vlakke grafen en de vierkleurenstelling

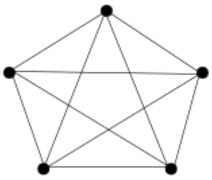
Kleuringen van landkaarten en grafen: Stel dat je de landen (of meer algemeen, de gebieden) van een landkaart wil inkleuren zodat twee aangrenzende landen een verschillende kleur krijgen. Hierbij bedoelen we met "aangrenzend" dat ze een stuk landsgrens gemeen hebben en dus niet enkel een grenspunt. Hoeveel kleuren heb je dan nodig? Dit probleem kan vertaald worden naar een probleem op grafen, door voor elk land een knoop te voorzien en twee knopen te verbinden met een boog als de bijbehorende landen aangrenzend zijn. De vraag op grafen luidt: stel dat je de knopen van een graaf wil kleuren zodat elke twee buren steeds een verschillende kleur krijgen, hoeveel kleuren heb je dan nodig?

Voorbeeld: Kaart van de 10 provincies van België en het Brussels Hoofdstedelijk Gewest.

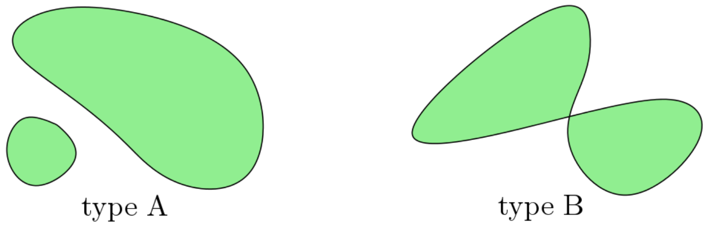


De linkse kaart toont de graaf die overeenkomt met de landkaart; de rechtse kaart een correcte knoopkleuring met vier kleuren. Is het mogelijk om de landkaart te kleuren met maar drie kleuren?

Voorbeeld: Beschouw de graaf K_5 met vijf knopen waarbij elke twee knopen verbonden zijn. Merk op dat je bij deze graaf met vier kleuren niet toekomt voor een correcte knoopkleuring.



Vlakke grafen: Grafen die horen bij een landkaart voldoen normaal gezien aan de voorwaarde dat ze **vlak** zijn, d.w.z. ze kunnen op zo'n manier getekend worden op een stuk papier dat de bogen elkaar niet snijden. Een voldoende voorwaarde hiervoor is dat alle landen een brave vorm hebben: landen met een vorm van type A of B in de onderstaande tekening worden hierbij uitgesloten.



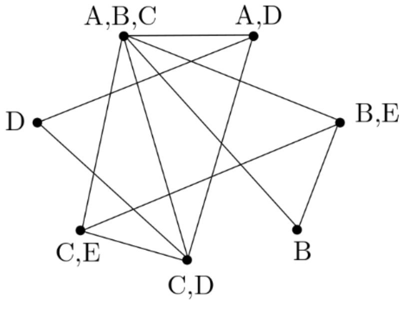
Landen van het type A zijn niet samenhangend/aaneensluitend. Denk hierbij maar aan landen of algemener gebieden met exclaves (bv. België met de gemeente Baarle-Hertog of de provincie Limburg met de gemeente Voeren). De bijbehorende graaf zal doorgaans nog wel vlak zijn.

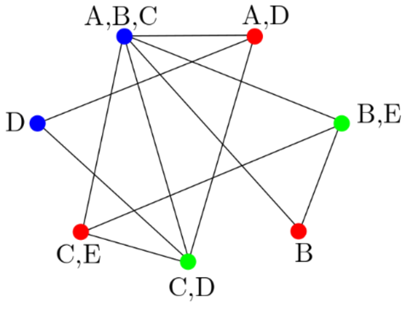
Overtuig jezelf van het feit dat de graaf K_5 uit het bovenstaand voorbeeld niet vlak is. Kan je een fictieve landkaart tekenen die overeenkomt met die graaf maar waarbij de 5 landen niet allemaal samenhangend zijn?

Vierkleurenstelling (Appel en Haken, 1976): Elke vlakke graaf heeft een 'correcte' knoopkleuring met maar 4 kleuren. Bijgevolg heeft elke landkaart waarvan de landen een brave vorm hebben een kleuring met maar 4 kleuren.

Knoopkleuringen van grafen hebben ook nog andere toepassingen. Ze kunnen bijvoorbeeld gebruikt worden bij planningsproblemen.

Voorbeeld: Stel je voor dat 5 leerlingen A, B, C, D, E allerlei werkjes moeten maken. Er zijn groepstaken voor het trio A, B, C en voor de duo's A, D; B, E; C, D en C, E en individuele taken voor de leerlingen B en D. Hoeveel verschillende momenten zijn er minstens nodig om de taken af te werken als op zo'n moment de leerlingen maar met één taak mogen bezig zijn? We kunnen deze situatie voorstellen door een graaf waarbij de 7 knopen overeenkomen met de taken en er bogen zijn tussen twee taken als er minstens één leerling is die beide taken moet maken.





Een correcte knoopkleuring (zoals in de rechtse tekening) geeft dan een mogelijke planning, waarbij elke kleur overeenkomt met een moment. Is er bij dit voorbeeld een planning mogelijk met maar twee momenten? Zijn er andere planningen mogelijk met maar drie momenten?

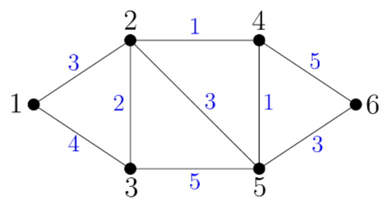
4.5 Kortste pad op gewogen grafen

We veronderstellen in dit deel dat we werken met een enkelvoudige graaf waarbij alle bogen een gewicht hebben, d.w.z. elke boog is voorzien van een positief getal. Zulke grafen noemen we **gewogen grafen**. Als voorbeeld kan je denken aan een transportnetwerk waarbij de gewichten overeenkomen met de afstanden of de reistijden tussen de knopen (bv. haltes of steden). Bepaalde problemen zijn te herleiden naar het zoeken naar een kortste pad tussen twee knopen. Merk op dat we hier spreken over 'een' kortste pad omdat er meerdere zulke paden kunnen zijn. Bij transportnetwerken komt zo'n pad overeen met een reisroute met minimale totale afstand of reistijd.

Algoritme van Dijkstra (1959): Onderstaand algoritme geeft als output de lengte van een kortste pad tussen twee willekeurige knopen $a, b \in K$ van een gewogen graaf.

1. Stel de verzameling $S = K$ en beschouw de lijst L met $L_a = 0$ en $L_k = \infty$ voor alle $k \neq a$.
2. Kies een knoop $c \in S$ met minimale waarde L_c en schrap c uit de verzameling S.
3. Herbereken de lijst L als volgt: voor alle knopen $k \in S$ die buur zijn van de knoop c, stel je L_k gelijk aan het minimum van L_k en $L_c + g(c, k)$, waarbij $g(c, k)$ het gewicht is van de boog met uiteindes c en k.
4. Als $b \notin S$: het algoritme stopt met output L_b; anders: ga terug naar stap 2.

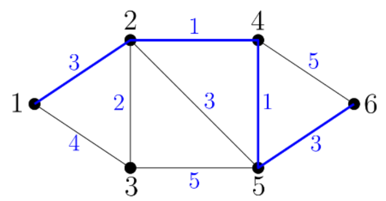
Voorbeeld: Stel dat we in onderstaande graaf met 6 knopen de lengte van een kortste pad willen bepalen tussen de knopen 1 en 6.



We volgen hierbij het algoritme van Dijkstra. Omdat de knopen genummerd zijn kunnen we de lijst L noteren als een zestal $(L_1, \ldots, L_6)$. We krijgen als tussenstappen in het algoritme:

- Stap 1: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ en $L = (0, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty)$
- Stappen 2 en 3 (1ste keer): $c = 1$, $L_c = 0$, $S = \{2,3,4,5,6\}$ en $L = (0,3,4, \infty, \infty, \infty)$
- Stappen 2 en 3 (2de keer): $c = 2$, $L_c = 3$, $S = \{3,4,5,6\}$ en $L = (0,3,4,4,6, \infty)$
- Stappen 2 en 3 (3de keer): $c = 3$, $L_c = 4$, $S = \{4,5,6\}$ en $L = (0,3,4,4,6, \infty)$
- Stappen 2 en 3 (4de keer): $c = 4$, $L_c = 4$, $S = \{5,6\}$ en $L = (0,3,4,4,5,9)$
- Stappen 2 en 3 (5de keer): $c = 5$, $L_c = 5$, $S = \{6\}$ en $L = (0,3,4,4,5,8)$
- Stappen 2 en 3 (6de keer): $c = 6$, $L_c = 8$, $S = \{\}$ en $L = (0,3,4,4,5,8)$
- Algoritme stopt met output $L_6 = 8$

Een kortste pad tussen de knopen 1 en 2 heeft inderdaad lengte 8.



4.6 Speciale types van grafen: bomen

Bepaalde grafen voldoen aan extra voorwaarden. Een **boom** is bijvoorbeeld een samenhangende graaf zonder cykels. Bomen kunnen ook op andere manieren worden gekarakteriseerd.

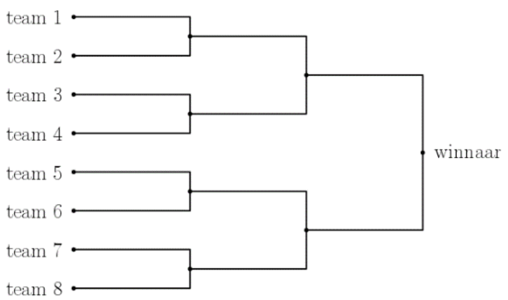
Eigenschap: Stel dat G een graaf is. Dan zijn de vier voorwaarden (1), (2), (3) en (4) equivalent, waarbij:

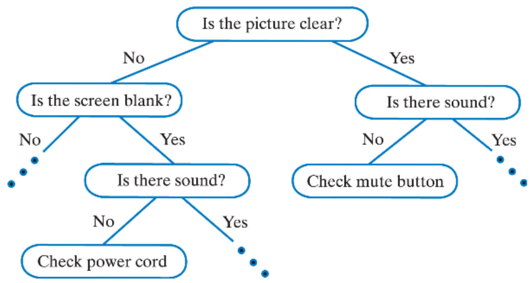
(1) G is een boom;
(2) op G is er tussen elke twee knopen een uniek pad;
(3) G is samenhangend en het aantal knopen van G is één meer dan het aantal bogen van G (voorwaarde in symbolen: $\#K = \#B + 1$);
(4) G is een samenhangende graaf die onsamenhangend wordt bij het weghalen van een willekeurige boog.

Terminologie specifiek voor bomen:

- De **bladeren** van een boom zijn de knopen met graad één.
- De **interne knopen** van een boom zijn de knopen met graad groter dan één.

Voorbeeld: Grafische voorstellingen van het knock-outsysteem bij toernooien (dus toernooien met rechtstreekse uitschakeling) of van beslissingsbomen met enkel ja/nee-vragen geven beiden aanleiding tot een speciale soort van bomen. In de bijbehorende bomen is er namelijk welgeteld één knoop met graad twee, die de **wortel** wordt genoemd; alle andere interne knopen hebben graad drie. Zulke grafen worden **volledige binaire bomen** genoemd. Bij een knock-outsysteem komen de bladeren overeen met de deelnemers en de wortel met de uiteindelijke winnaar. Bij een beslissingsboom komen de bladeren overeen met de mogelijke uitkomsten en de wortel met de startvraag.





Eigenschap: Een volledige binaire boom met n interne knopen heeft precies $n + 1$ bladeren, $2n + 1$ knopen in totaal en $2n$ bogen.

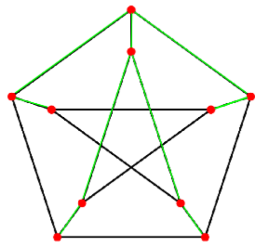
Je kan deze eigenschap onderzoeken en bijvoorbeeld gebruiken bij het oplossen van problemen zoals het bepalen van het aantal beslissingen die moeten worden genomen in een beslissingsboom met een gegeven aantal uitkomsten, of het bepalen van het aantal wedstrijden in een knock-outsysteem met een gegeven aantal deelnemers.

4.7 Minimaal opspannende bomen op gewogen grafen

Een opspannende boom van een graaf G is een deelgraaf van G (d.w.z. opgebouwd uit de knopen en bogen van G) die een boom is en alle knopen van G bevat.

Voorbeeld:

De graaf die hiernaast is voorgesteld wordt de **Petersengraaf** genoemd. Hij heeft 10 knopen en 15 bogen. Alle knopen hebben graad drie. In het groen is een opspannende boom getekend van de Petersengraaf. Kan je een andere opspannende boom tekenen?



Eigenschap: Elke samenhangende graaf heeft een opspannende boom.

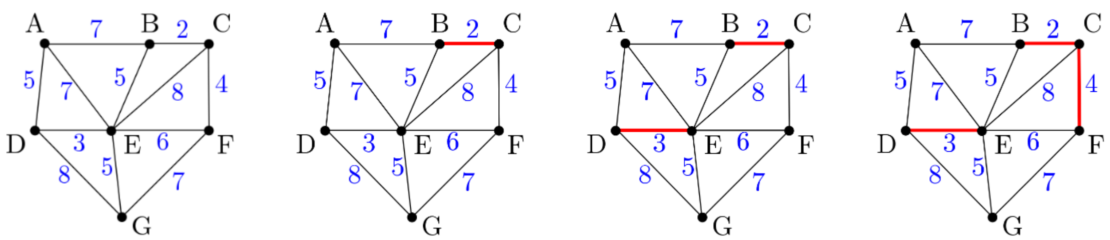
Bepaalde problemen zijn te herleiden naar het zoeken van een opspannende boom met een minimaal totaal gewicht op een gewogen graaf, kortweg een **minimaal opspannende boom**. Denk hierbij maar aan een transportnetwerk waarbij de haltes/steden moeten worden verbonden via kabels en waarbij de gewichten overeenkomen met de kostprijzen van het plaatsen van de kabel.

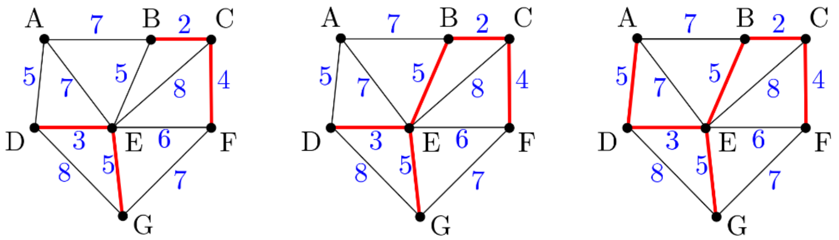
Voor het zoeken van een minimaal opspannende boom op een gewogen graaf G zijn er twee bekende algoritmen. Beide algoritmen zijn heel intuïtief omdat ze gulzig (Engels: greedy) zijn. Ze zijn daarom niet enkel makkelijk toe te passen, maar ze kunnen na wat speurwerk (door bijvoorbeeld op voorbeelden te redeneren) ook zelf worden ontdekt.

Algoritme van Prim:	*Algoritme van Kruskal*:
1. Neem een willekeurige knoop van G en stel T gelijk aan de graaf bestaande uit die ene knoop. 2. Van alle bogen van G die een knoop van T verbinden met een knoop die niet in T zit, neem een boog met minimaal gewicht. Voeg die boog samen met het extra uiteinde toe aan T. 3. Als de graaf T alle knopen van G bevat: het algoritme stapt met output T; anders: ga terug naar stap 2.	1. Stel T gelijk aan de ledige graaf. 2. Van alle bogen van G die nog niet in T zitten en die bij toevoeging aan T geen cykel doen ontstaan, neem een boog met minimaal gewicht. Voeg die boog en zijn uiteindes toe aan T. 3. Als de graaf T alle knopen van G bevat en samenhangend is: het algoritme stapt met output T; anders: ga terug naar stap 2.

Merk op dat in elke tussenstap van het algoritme van Prim de graaf T een boom is, terwijl dat niet het geval hoeft te zijn bij het algoritme van Kruskal (daar is T steeds een unie van bomen, wat vaak een **bos** wordt genoemd).

Voorbeeld: We zoeken voor een bepaalde graaf G een minimale opspannende boom via het algoritme van Kruskal. De onderstaande figuren tonen de graaf T bij de tussenstappen. Merk op dat de graaf G drie verschillende bogen heeft van lengte 5 en dat er daardoor bij bepaalde tussenstappen verschillende mogelijke keuzes waren om een boog toe te voegen.





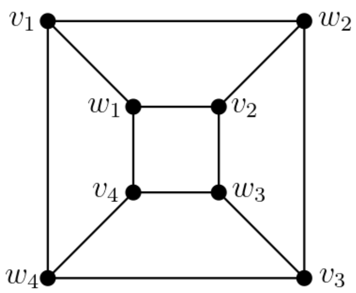
4.8 Speciale types van grafen: tweeledige grafen

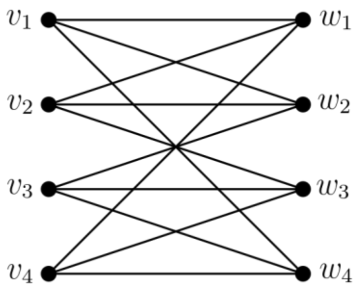
Tweeledige grafen zijn grafen waarbij de verzameling van knopen opgedeeld kan worden in twee deelverzamelingen zodat er geen bogen zijn tussen knopen die behoren tot zo'n deelverzameling. Doorgaans worden in een grafische voorstelling van een tweedelige graaf de knopen behorende bij elk van de twee deelverzamelingen verticaal boven/onder mekaar geplaatst. Tweeledige grafen kunnen op nog andere manieren worden gekarakteriseerd.

Eigenschap: Stel dat G een graaf is. Dan zijn de drie voorwaarden (1), (2) en (3) equivalent, waarbij:

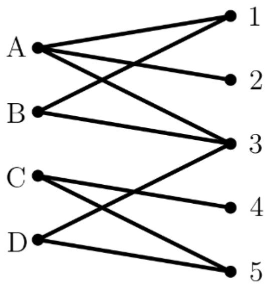
(1) G is tweeledig.
(2) G heeft een knoopkleuring met twee kleuren.
(3) G heeft geen cykels met een oneven aantal bogen.

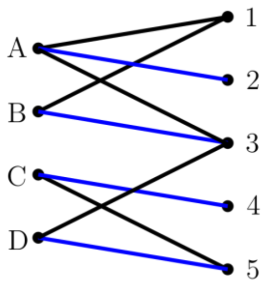
Voorbeeld: Onderstaande tekeningen geven twee grafische voorstellingen van dezelfde tweeledige graaf.





Voorbeeld: Stel dat 4 personen A, B, C, D een afspraak willen vastleggen en dat deze afspraak maar op 5 momenten a, b, c, d, e mogelijk is. Elke persoon kijkt naar zijn agenda en noteert de mogelijke momenten: persoon A kan op a, b, c, persoon B kan op a, c, persoon C kan op d, e en persoon D kan op c, e. Zo'n situatie kan ook grafisch worden voorgesteld via een tweeledige graaf, zie de linkse figuur. De rechtse figuur toont een mogelijke oplossing voor het probleem.





Zo'n koppeling (Engels: matching) is niet altijd mogelijk. Bijvoorbeeld, als twee personen enkel vrij zijn op eenzelfde moment is het niet mogelijk om een goede planning vast te leggen. Het bestaan van een koppeling kan worden gekarakteriseerd (Trouwstelling van Hall, zie ook link).

5 Bronnenlijst

[1] Bart Demoen, *“Fundamenten voor de informatica”*, oude cursus gebruikt aan KUL.

[2] Michel Roelens en Els Vanlommel, *“Redeneren en puzzelen met grafen”*, Uitwiskeling 36/2, lente 2020

[3] Alexander Schrijver, *“Grafen: kleuren en routeren”*, beschikbaar via [graphs1_3.dvi (cwi.nl)]